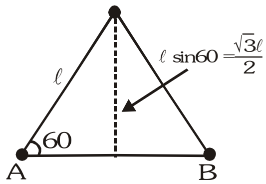
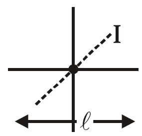
17. MI about AB is = 0 + 0 + m $\left(\frac{\sqrt{3}\ell}{2}\right)^2 = \frac{3m\ell^2}{4}$



18. MI = $\frac{2\times m\ell^2}{12} = \frac{m\ell^2}{6}$



19. I .7 10^{-24} 10^{-3} $\left(\frac{4\times10^{-8}\times10^{-2}}{2}\right)^2$ 2

= 1.7 10^{-24} $\frac{16\times10^{-20}}{4}$ 2 10^{-3} = 13.6 10^{-47}

20. $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$ rad/sec.

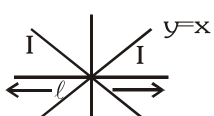
K.E. = $\frac{1}{2}$ $I\omega^2 \Rightarrow I = \frac{2K.E.}{4} \Rightarrow I = \frac{K.E.}{2}$

21. MI is more when mass is for away
(जड़त्व आघूर्ण अधिकतम होगा जब द्रव्यमान दूर हो)

$I_{rods} = \int dm$ $(2a)^2$ = M $4a^2$

$I_{ring} = \int dm\ a^2 = Ma^2$

22. From perpendicular axis theorem
(लम्बवत् अक्षों के प्रमेय से)



$\therefore$ I + I = $\frac{M\ell^2}{12} \Rightarrow I = \frac{M\ell^2}{24}$

$\therefore$ MI of two rods = 2 $\frac{M\ell^2}{24} = \frac{M\ell^2}{12}$

23. I = $x^2 - 2x + 99$
MI about axis pass through centre of mass will be minimum when (द्रव्यमान केन्द्र से गुजरने वाले अक्ष के परित: जड़त्व आघूर्ण न्यूनतम होगा, जब)

$$\frac{dI}{dx} = 0 \Rightarrow 2x - 2 = 0 \Rightarrow x=1$$

24. Plane of disc is (X – Z)
$\therefore I_y = I_x + I_z \Rightarrow 40 = 30 + I_z \therefore I_z = 10$

25. $\omega = \frac{720\times2\pi}{60} = 24\pi$
$0 = 24\pi - \alpha$ 8 $\Rightarrow \alpha = 3\pi$
$\tau = I\alpha = \frac{24}{\pi}$ $3\pi = 72$

26. Rod rotates about its one end in a horizontal plane (छड़ क्षैतिज तल में इसके एक सिरे के सापेक्ष घूर्णन करती है)

$\therefore \tau = I\alpha \Rightarrow \frac{Mg}{2}\times\frac{5L}{6} = \frac{ML^2}{3}$ $\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{5g}{4L}$

27. $\therefore$ Book does not rotate so for rotational equilibrium the net torque becomes zero.
(किताब घूर्णन नहीं करती है अत: घूर्णन साम्यावस्था के लिए कुल बलाघूर्ण शून्य होगा)

$\vec{\tau}_{weight} + \vec{\tau}_{man} = \vec{0}$

$\therefore \vec{\tau}_{man} = -\vec{\tau}_{weight} = -\left[W\times\frac{b}{2}\text{ anticlockwise}\right]$

28. For angular acceleration (कोणीय त्वरण के लिए)$\tau = I\alpha$
$\Rightarrow 20$ 0.2 = 0.2 $\alpha \Rightarrow \alpha = 20$ rad/sec^2
$\therefore \omega = \omega_0 + \alpha t = 0 + 20$ 5 = 100 rad/sec

29. $\because$ Density of steel > Density of wood
(स्टील का घनत्व > लकड़ी का घनत्व)
$\therefore$ MI about O > MI about O
[in fig(a)] [in fig(b)]

$\therefore \alpha = \frac{\tau}{I} \Rightarrow \frac{\alpha_0}{\alpha_0'} = \frac{I_0'}{I_0}$

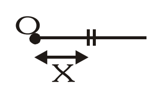
30. Angular acceleration (कोणीय त्वरण)$\alpha = \frac{\tau}{I}$
$\tau = (10 + 9)$ 0.3 – 12 0.05 = 5100 α
$\therefore \alpha = 10^{-3}$ rad/sec^2

31. Centre of mass of the rod (छड़ का द्रव्यमान केन्द्र)

= C.M. from 'O' $= \frac{1}{\left(\frac{\lambda_0 L^2}{2}\right)}\int_0^L(\lambda_0 x\,dx)\,x$

$\therefore$ C.M. = $\frac{2}{3}$ L from O
Moment of inertia about O is
(O के परित: जड़त्व आघूर्ण)

$I = \int dI = \int dm\,r^2 = \int_0^L(\lambda_0 x\,dx)\,x^2 = \frac{\lambda_0 L^4}{4}$



$\therefore$ Angular acceleration (कोणीय त्वरण)

$$\alpha = \frac{\tau_{weight}}{I} = \frac{\left(\frac{\lambda_0 L^2}{2}\right)g\times\frac{2}{3}L}{\frac{\lambda_0 L^4}{4}} = \frac{4g}{3L}$$

50. $a = \dfrac{g\sin\theta}{1+\dfrac{K^2}{R^2}} \Rightarrow \dfrac{K^2}{R^2}\uparrow \Rightarrow a\downarrow = \text{time}\uparrow;\ \dfrac{K^2}{R^2} = \dfrac{2}{5}$

$\Rightarrow$ For solid sphere which is minimum in all of them. So a is maximum and time to reach bottom is minimum. (इन सभी में से ठोस गोले के लिए इसका मान न्यूनतम होता है। इसलिए a अधिकतम होगा तथा तल पर पहुंचने में लगा समय न्यूनतम होगा)

51. As given $(KE)_R = (KE)_{\text{translational}} = \dfrac{1}{2}I\omega^2 = \dfrac{1}{2}Mv^2$

$= \dfrac{1}{2}MK^2\omega^2 = \dfrac{1}{2}MR^2\omega^2;\ \dfrac{K^2}{R^2} = 1 \Rightarrow$ Hence ring

52. $mgh = \dfrac{1}{2}Mv^2 + \dfrac{1}{2}\dfrac{MR^2}{2}\dfrac{v^2}{R^2}$

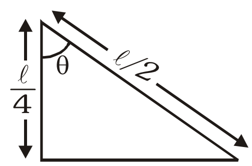
$\Rightarrow gh = \dfrac{2v^2+v^2}{4} \Rightarrow \dfrac{3v^2}{4} = gh \Rightarrow v = \sqrt{\dfrac{4}{3}gh}$

53. $\dfrac{1}{2}Mv^2 + \dfrac{1}{2}\dfrac{MR^2}{2}\dfrac{v^2}{R^2} = mgh \Rightarrow h = \dfrac{3v^2}{4g}$

54. $\dfrac{1}{2}Mv^2 + \dfrac{1}{2}\dfrac{2}{5}MR^2\dfrac{v^2}{R^2} = Mgh$

$\Rightarrow \dfrac{v^2}{2}\left[1+\dfrac{2}{5}\right] = gh \Rightarrow v = \sqrt{\dfrac{10gh}{7}}$

55. Angular velocity of rod in vertical position (ऊर्ध्वाधर दिशा में छड़ का कोणीय वेग)



$\dfrac{1}{2}\dfrac{ML^2}{3}\omega^2 = \dfrac{MgL}{2};\ \omega = \sqrt{\dfrac{3g}{L}}$

upper part of rod rotates through an angle θ its centre of mass will rise $\dfrac{L}{4}(1-\cos\theta)$

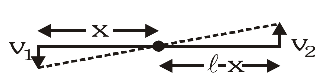
(छड़ का ऊपरी भाग θ से घूर्णन करता है अत: द्रव्यमान केन्द्र बढ़ेगा $\dfrac{L}{4}(1-\cos\theta)$)

From energy conservation (ऊर्जा संरक्षण द्वारा)

$= \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{M}{2}\right)\dfrac{(L/2)^2}{3}\left(\sqrt{\dfrac{3g}{2}}\right)^2 + \dfrac{1}{4}MgL = \dfrac{1}{4}MgL\cos\theta$

$\Rightarrow \theta = 60°$

56. $\therefore\ \dfrac{v_1}{x} = \dfrac{v_2}{\ell - x}$



$\therefore\ v_1\ell = v_2x + v_1x\ ;\ x = \dfrac{v_1\ell}{v_1+v_2}$

EXERCISE –II

1. $I = 2\left\{\dfrac{M\ell^2}{3} + \left[\dfrac{M\ell^2}{3} + M\ell^2\right]\right\} \Rightarrow I = \dfrac{10M\ell^2}{3}$

2. When ball moves towards ends of the tube MI increases (जब गेंद नली के सिरों की ओर गति करती है तो जड़त्व आघूर्ण बढ़ता है)

($\therefore$ For system $\Sigma\vec{f}_{ext}$ & $\Sigma\vec{\tau}_{ext}$ are zero)

$\therefore$ Angular momentum & linear momentum remains constant

(कोणीय संवेग तथा रेखीय संवेग नियत होते हैं)

$\therefore\ I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \Rightarrow I_2 > I_1 \Rightarrow \omega_2 < \omega_1$

3. $P \times \dfrac{\ell}{2} = I\omega$ or $\omega = \dfrac{P\ell}{2I} = \dfrac{P\ell}{2\times\dfrac{m\ell^2}{12}} = \dfrac{6P}{m\ell}$

So $t = \dfrac{\theta}{\omega} = \dfrac{\pi}{2}\times\dfrac{1}{6P/m\ell} = \dfrac{\pi m\ell}{12P}$

4. The prism will be topple when the torque due to F becomes greater than the torque of weight about the front corner of the prism.

(जब प्रिज्म उलटता है तो F के कारण बलाघूर्ण प्रिज्म के सामने के सिरे के सापेक्ष बलाघूर्ण की तुलना में अधिक होता है)

$\therefore\ F\dfrac{\sqrt{3}a}{2} = mg\dfrac{a}{2}\ \therefore\ F = \dfrac{mg}{\sqrt{3}}$

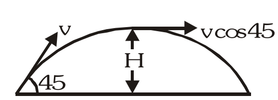
5. As rod does not slip on the disc, so the kinetic energy of the rod is (चूंकि छड़ चकती पर नहीं फिसलती है, अत: छड़ की गतिज ऊर्जा)

$= \dfrac{1}{2}I\omega^2 = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{ML^2}{12} + MR^2\right]\omega^2$

I – MI of rod about axis passing through centre of disc & perpendicular to the plane.

(I– तल के लम्बवत् तथा चकती के केन्द्र से होकर गुजरने वाली अक्ष के सापेक्ष छड़ का जड़त्व आघूर्ण)

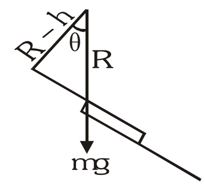
6. Max height (अधिकतम ऊंचाई) $H = \dfrac{(v\sin 45)^2}{2g} = \dfrac{v^2}{4g}$



Angular momentum (कोणीय संवेग)

$= mv\cos45\quad H = \dfrac{mv}{\sqrt{2}}\ \dfrac{v^2}{4g} = \dfrac{mv^3}{4\sqrt{2}g}$

19. Sphere is on verge of toppling when line of action of weight passes through edge. (जब भार की क्रिया रेखा भुजा से गुजरती है तो गोला उलटने की स्थिति में होता है)

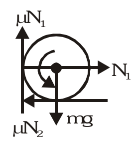


$\cos\theta = \dfrac{R-h}{R} \Rightarrow h = R - R\cos\theta$

20. In figure (a) $\mu N_1 + N_2 = mg$ ... (i)

$N_1 = \mu N_2,\ N_2 = \dfrac{mg}{1+\mu^2} \therefore f_a = \dfrac{3}{10}mg$

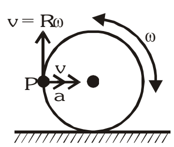
21. In figure (b) $N_1=0,\ N_2 = mg$...(ii)



$f_b = \mu N_2 = \dfrac{mg}{3} \quad \therefore \dfrac{f_a}{f_b} = \dfrac{9}{10}$

22. $\therefore$ For purely rolling (शुद्ध घूर्णन के लिए)

$v = R\omega$



So at point 'P' the resultant velocity makes 45 with horizontal 'x' axis and it is also the angle between 'v' and 'a'. (अत: बिन्दु P पर परिणामी वेग का क्षैतिज x अक्ष के साथ 45 डिग्री का कोण बनाता है तथा यह v तथा a के मध्य कोण भी होता है)

23. For motion from A to B from energy considerations (A से B तक गति के लिए ऊर्जा संरक्षण द्वारा)

$$\frac{mgh}{2} = \frac{1}{2}mv^2\left(1+\frac{1}{2}\right) \text{ or } v^2 = \frac{2gh}{3}$$

Now, for motion from B to C
(अब B से C तक गति के लिए)

$$\frac{mgh}{2} = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{2gh}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{mgh}{2} - \frac{mgh}{3} = \frac{1}{2}I\omega^2 \Rightarrow \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{mgh}{6} \text{ ...(i)}$$

thus remaining translational KE
(अत: शेष स्थानान्तरित गतिज ऊर्जा)

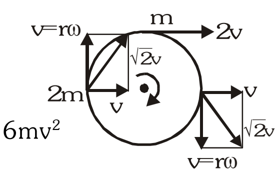
$$KE_t = mgh - \frac{mgh}{6} = \frac{5mgh}{6}$$

hence required ratio (अत: अभिष्ट अनुपात)

$$\frac{KE_t}{KE_r} = \frac{5mgh}{6} \times \frac{6}{mgh} = 5$$

24. $KE_{system} = \dfrac{1}{2}mv^2(1+1) + \dfrac{1}{2}$

$(m+2m)2v^2 + \dfrac{1}{2}m(2v)^2 = 6mv^2$



25. As we displace to the right, lower point of rod is having tendency to move towards left. So friction is in direction right so center of mass will move right.
(जब छड़ के शीर्ष को दांयी ओर विस्थापित करते हैं, छड़ के निम्न बिन्दु की प्रवृत्ति बांयी ओर गति करने की होगी अत: घर्षण की दिशा दांयी ओर होगी अत: द्रव्यमान केन्द्र दांयी ओर गति करेगा।)

26. Frictional force always acts in such a way to prevent the sliding or slipping.(घर्षण बल इस प्रकार से लगता है कि यह इसको फिसलने से रोके)

27. As the disc comes to rest, ($\therefore$ चकती विरामावस्था में है)

So $0 = v_0 - \mu g t \quad \Rightarrow t = \dfrac{v_0}{\mu g}$

Also $0 = \omega_0 - \alpha t \quad \Rightarrow t = \dfrac{\omega_0}{\alpha}$

Thus $\dfrac{v_0}{\mu \times g} = \dfrac{\omega_0}{\alpha} \Rightarrow \dfrac{v_0}{\omega_0} = \dfrac{\mu g}{\alpha}$

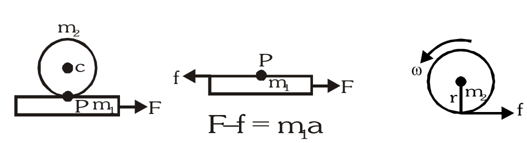
$$\Rightarrow \frac{v_0}{r\omega_0} = \frac{\mu g}{\alpha}\frac{mr}{mr^2} = \frac{\tau}{\alpha mr^2} = \frac{I}{mr^2} = \frac{mr^2/2}{mr^2} = \frac{1}{2}$$

29. Angular momentum (कोणीय संवेग)= $\vec{r} \times \vec{p}$

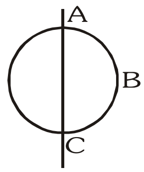
As $\vec{v}$ increases when falls down then $\vec{p}$ also and so angular momentum is also increases. As particle falls down the length of position vector decrease so MI about 'O' also decreases.
(जब कण नीचे गिरता है तो $\vec{v}$ बढ़ता है अत: $\vec{p}$ भी बढ़ेगा। इसलिए कोणीय संवेग भी बढ़ेगा। चूंकि जब कण नीचे गिरता है तो लम्बाई का स्थिति सदिश घटता है। इसलिए O के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण भी घटता है।

कोणीय वेग $\omega = \dfrac{v}{r} \Rightarrow r\downarrow = \omega\uparrow$

30. Force diagram of plank and sphere
(तख्ते तथा गोले का बल निर्देशक आरेख)



5. (A) When insects move from A to B moment of inertia increases and when if move from B to C moment of inertia decreases



(जब कीड़ा A से B गति करता है तो जड़त्व आघूर्ण बढ़ता है तथा जब यह B से C गति करता है तो जड़त्व आघूर्ण घटता है)

(B) No torque acts on a particle angular momentum of the particle remain constant (कण पर कोई बलाघूर्ण नहीं लगता है इसलिए कण का कोणीय संवेग नियत रहता है)

$I\omega$ = constant (नियत)

$\therefore$ ω first decreases & then increases

($\therefore$ ω पहले घटता है फिर बढ़ता है)

(C) Remain constant (नियत रहता है)

(D) KI = $\frac{L^2}{2I}$ $\therefore$ first decreases & then increases

(पहले घटता है फिर बढ़ता है)

6. For translatory motion (स्थानान्तरित गति के लिए)

$F - f_r = ma_{cm}$...(i)

For rotatory motion (घूर्णन गति के लिए)

$FR + f_rR = I\alpha$...(ii)

By solving equation (i) and (ii)

$$\frac{2FR^2}{I+mR^2} = a_{cm} \Rightarrow a_{cm} = \frac{2F}{m}\left[\frac{1}{1+\frac{K^2}{R^2}}\right]$$

(A) For $\frac{K^2}{R^2}$ minimum a_{cm} is maximum in sphere

(न्यूनतम $\frac{K^2}{R^2}$ के लिए व a_{cm} गोले में अधिक होता है)

(B) For $\frac{K^2}{R^2} = 1 \Rightarrow a_{cm} = \frac{F}{m}$ that is $f_r = 0$

(C) For $\frac{K^2}{R^2} = \frac{2}{3} \Rightarrow a_{cm} = \frac{6F}{5m}$ that is $f_r = \frac{F}{5}$

(D) For $\frac{K^2}{R^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow a_{cm} = \frac{4F}{3m}$

Comprehension # 1

1. **Case I** **Case II**

$\int N dt = mv_1 - 0$ $\int N dt = mv_2$

$\frac{R}{4}\int N dt = I\omega_1 - 0$ $\frac{R}{2}\int N dt = I\omega_2$

as $\omega_2 > \omega_1 \Rightarrow KE_2 > KE_1$

2. Point of percussion at which (f_r = 0)
(f_r = 0 पर संघात का बिन्दु)

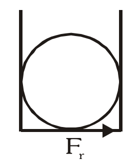
$= \frac{I}{MR} \Rightarrow h_0 = 0.4R$

For $h > h_0$ friction act in forward direction
($h > h_0$ के लिए घर्षण आगे की दिशा में लगता है)

Comprehension # 2

1. $f_r = \mu mg(R) = I\alpha = (0.1)5 \quad 10 \quad 1$

$= \frac{2}{5}MR^2\alpha \Rightarrow \alpha = 2.5\ rad/sec^2$

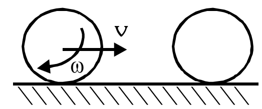


$\omega = \omega_0 - \alpha t$

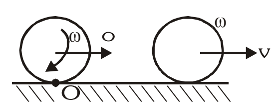
$0 = 40 - (2.5)\ t \Rightarrow t = 16$ sec

Comprehension # 3

1. By applying conservation of angular momentum about O.
(O के सापेक्ष कोणीय संवेग संरक्षण से)



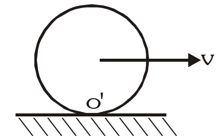
$$MvR + \frac{2}{5}mR^2\omega = mv'R + \frac{2}{5}\frac{mR^2v'}{R} + MVR$$



$$\frac{2}{5}mR^2\omega = \frac{7}{5}mv'R \Rightarrow v' = \frac{2}{7}\omega R$$

2. By applying angular momentum conservation law
(कोणीय संवेग संरक्षण नियम से)

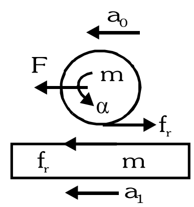
$$mvR = \frac{7}{5}\frac{mv'R^2}{R} \Rightarrow v' = \frac{5v}{7}$$



Change in angular momentum gives angular impulse
(दिये गये कोणीय आवेग से कोणीय संवेग में परिवर्तन)

$$R\int N dt = I\omega = 0 = \frac{2}{5}mR^2\left(\frac{5v}{7R}\right) = \frac{2}{7}mvR$$

Comprehension # 8



1,2 For translatory equilibrium
(स्थानान्तरित साम्यावस्था के लिए)

$F - f_r = ma_0$ ....(i)

For rotatory motion
(घूर्णन गति के लिए)

$f_r R = I\alpha$....(ii)

For plank (तख्ते के लिए) $f_r = ma_1$ ...(iii)

By solving equation (i) (ii) and (iii)

$$a_0 - \alpha R = a_1 \Rightarrow \left(\frac{F - f_r}{m}\right) - \left(\frac{2f_r}{m}\right) = \frac{f_r}{m}$$

$$\Rightarrow f_r = \frac{F}{4}\ ;\ a_p = \frac{F}{4m}$$

Comprehension # 9

1. Normal of the cube shift towards the point 'A' to balance torque of friction.
(घर्षण के आघूर्ण को सन्तुलित करने के लिये घन का अभिलम्ब बिन्दु A की ओर विस्थापित होगा।)

2. For toppling before translation torque of F and f_r about centre of mass.(स्थानान्तरित गति से पहले पलटने के लिए द्रव्यमान केन्द्र के सापेक्ष F व f_r का बलाघूर्ण)

$$\tau_{net} = f\left(\frac{a}{2}\right) + f_r\left(\frac{a}{2}\right) = \mu_r\ mga = 0.2mga$$

and torque of normal about centre of mass
(तथा द्रव्यमान केन्द्र के सापेक्ष अभिलम्ब का बलाघूर्ण)

$mg\ a/2 = 0.5\ mga$

Torque of normal > Torque of mg and fr
(अभिलम्ब का बलाघूर्ण >mg तथा fr का बलाघूर्ण)

$\therefore$ Body will translate before toppling
(अतः वस्तु पहले स्थानान्तरित होगी और फिर पलटेगी)

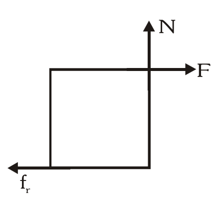
3. Torque of f_r and F is (f_r तथा F का बलाघूर्ण)

$= \mu_r mga = 0.6$ mga

Torque of normal (अभिलम्ब बलाघूर्ण)

$$= \frac{mga}{2} \Rightarrow 0.5\ mg;$$

$\tau_{fr.F} > \tau_N$



$\therefore$ body will topple before translate
(अतः वस्तु पहले पलटेगी फिर स्थानान्तरित होगी)

Comprehension # 10

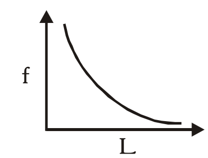
1. Torque needed to lift the block = mgR
(ब्लॉक को उठाने में आवश्यक बलाघूर्ण)
Torque due to wrench on = FL as L increases, force decreases
(रिंच के कारण बलाघूर्ण =FL चूंकि L बढ़ता है, अतः बल घटेगा)

2. By applying work energy theorem
(कार्य–ऊर्जा प्रमेय से) $\Delta KE = w_B + w_{wrench}$

$0 = -mg(1) + w_{wrench} \Rightarrow w_{wrench} = mg$

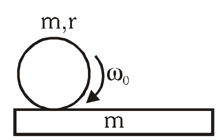
work done and power will remain same
(किया गया कार्य तथा शक्ति समान होगी)

3.



Comprehension # 11

After some time both block and disc move with same velocity due to momentum conservation. As given in question 50% of total kinetic energy of system is lost.
(कुछ समय बाद ब्लॉक तथा चकती दोनों के वेग संवेग संरक्षण के कारण समान होंगे। चूंकि दिये गये प्रश्न में निकाय की कुल गतिज ऊर्जा का 50% नष्ट हो जाता है)



$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}mr^2\omega_0^2\right) = mv^2 + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}mr^2\omega^2 \ ...(i)$$

By impulse equation due to friction.
(घर्षण के कारण आवेग समीकरण द्वारा)

$$\frac{1}{2}mr^2\omega_0 - \frac{1}{2}mr^2\omega = \mu mgr\Delta t\ ...(ii)$$

Block will achive velocity v in time Δt
(ब्लॉक Δt समय में v वेग प्राप्त कर लेगा)

$$\text{so } \Delta t = \frac{v}{\mu g}\ ...(iii)$$

So by solving equation (i), (ii),(iii)

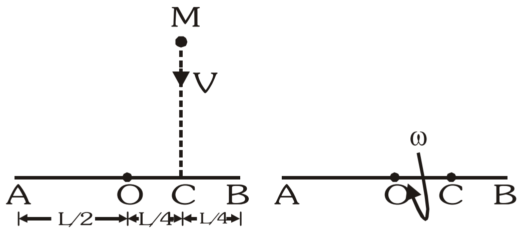
1. $v = \dfrac{r\omega_0}{4}$

2. By eq^n (iii) $\text{Time} = \dfrac{r\omega_0}{4\mu g}$

3. By equation (ii) & (iii) $\omega_0 r - \omega r = 2v \Rightarrow \omega = \dfrac{\omega_0}{2}$

So change in angular momentum

5. (i) In this problem we will write K for the angular momentum because L has been used for length of the rod. (इस समस्या में हम कोणीय संवेग को K लिखेंगे क्योंकि L छड़ की लम्बाई है)



Just before collision Just after collision

Angular momentum of the system (rod + insect) about the centre of the rod O will remain conserved just before collision and after collision i.e., $K_i = K_f$. (छड़ के केन्द्र O के सापेक्ष निकाय का कोणीय संवेग (छड़+कीड़ा) टक्कर के ठीक पहले तथा टक्कर के ठीक बाद संरक्षित रहता है अर्थात् $K_i = K_f$)

$$\Rightarrow Mv\frac{L}{4} = I\omega = \left[\frac{ML^2}{12} + M\left(\frac{L}{4}\right)^2\right]\omega$$

$$\Rightarrow Mv\frac{L}{4} = \frac{7}{48}ML^2\omega \quad \text{i.e.,} \quad \omega = \frac{12}{7}\frac{v}{L}$$

(ii) Since the weight of the insect will exert a torque the angular momentum of the system will not be conserved. Let at any time t, the insect be at a distance x from o on the rod and by then the rod has rotated through on angle 'θ'. Then angular momentum of the system will be
(चूंकि कीड़े पर आरोपित बलाघूर्ण है। अत: निकाय का कोणीय संवेग संरक्षित नहीं होगा। माना किसी समय t पर कीड़ा छड़ पर 0 से x दूरी पर है तथा छड़ को θ कोण द्वारा घूर्णन कराया जाता है तो निकाय का कोणीय संवेग)

$$J = \left(\frac{ML^2}{12} + Mx^2\right)\omega \Rightarrow \frac{dJ}{dt} = 2Mx\frac{dx}{dt}\omega$$

and $\tau = Mgx\cos\theta = Mgx\cos\omega t \quad [\theta = \omega t]$

So $Mgx\cos\omega t = 2Mx\frac{dx}{dt}\omega \Rightarrow dx = \left(\frac{g}{2\omega}\right)\cos\omega t\, dt$

According to given condition i.e. for
(दी गई शर्त के अनुसार अर्थात्)

$x = L/4$, $t = 0$ and for $x = \frac{L}{2}$, $t = \frac{\pi}{2\omega}$ [as $\omega t = \frac{\pi}{2}$],

the above equation becomes (उपरोक्त समीकरण से)

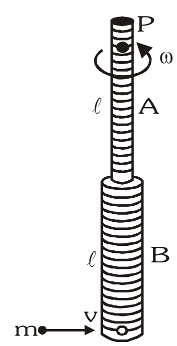
$$\int_{L/4}^{L/2} dx = \frac{g}{2\omega}\int_0^{\pi/2\omega}\cos\omega t\, dt$$

$$\Rightarrow [x]_{L/4}^{L/2}\ \frac{g}{2\omega^2}\ (\sin\omega t)_0^{\pi/2\omega} \Rightarrow \frac{L}{4} = \frac{g}{2\omega^2} \text{ i.e. } \omega = \sqrt{\frac{2g}{L}}$$

Substituting this value in (मान रखने पर) $\omega = \frac{12v}{7L}$

$$\sqrt{\frac{2g}{L}} = \frac{12v}{7L} \text{ i.e. } v = \frac{7}{12}\sqrt{2\times10\times1.8} = 3.5 \text{ m/s.}$$

6. System is free to rotate but not free to translate. During collision, net torque on the system (rod A + rod B + mass m) about point P is zero. Therefore, angular momentum of system before collision= Angular momentum of system just after collision. (About P). (निकाय घूर्णन के लिये स्वतंत्र है किन्तु स्थानान्तरित गति के लिए स्वतंत्र नहीं है। टक्कर के दौरान बिन्दु P के सापेक्ष निकाय (छड़ A + छड़ B) पर कुल बलाघूर्ण शून्य है। अत: टक्कर के पहले निकाय का कोणीय संवेग = टक्कर के ठीक निकाय का कोणीय संवेग (P के सापेक्ष)



Let ω be the angular velocity of system just after collision, then
(माना ω टक्कर के ठीक बाद निकाय का कोणीय वेग है तो)

$$L_i = L_f \Rightarrow mv(2\ell) = I\,\omega$$

Here, I = moment of inertia of system about P
(यहां, I= P के सापेक्ष निकाय का जड़त्व आघूर्ण है)

$$= m(2\ell)^2 + m_A(\ell^2/3) + m_B\left[\frac{\ell^2}{12} + \left(\frac{\ell}{2} + \ell\right)^2\right]$$

Given : $\ell = 0.6$m, $m = 0.05$kg
$m_A = 0.01$ kg and $m_B = 0.02$ kg

Substituting the values, we get (मान रखने पर)

$$I = 0.09 \text{ kg–m}^2$$

Therefore, from Equation (i) (अत: समी. (i) से)

$$\Rightarrow \omega = \frac{2mv\ell}{I} = \frac{(2)(0.05)(v)(0.6)}{0.09} \Rightarrow \omega = 0.67\,v \quad ...(ii)$$

Now, after collision, mechanical energy will be conserved. (अब, टक्कर के बाद यांत्रिक ऊर्जा संरक्षित होगी)

9. Given mass of disc m = 2kg and radius R =0.1 m (दिया है: चकती का द्रव्यमान m = 2kg तथा त्रिज्या R=0.1m)

(i) FBD of any one disc is (कोई एक चकती का FBD)

Frictional force on the disc should be in forward direction. Let a_0 be the linear acceleration of COM of disc and α the angular acceleration about its COM. Then, (चकती पर घर्षण बल आगे की दिशा में होता है। माना a_0 चकती के द्रव्यमान केन्द्र का रेखीय त्वरण तथा α इसके द्रव्यमान केन्द्र के सापेक्ष कोणीय त्वरण है तो)

$$a_0 = \frac{f}{m} = \frac{f}{2} \;....(i)$$

$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{fR}{\frac{1}{2}mR^2} = \frac{2f}{mR} = \frac{2f}{2 \times 0.1} = 10f \;...(ii)$$

Since, there is no slipping between disc and truck. Therefore. Acceleration of point P = Acceleration of point Q (चूंकि यहां चकती तथा ट्रक के मध्य कोई फिसलन नहीं है, अत: बिन्दु P का त्वरण = बिन्दु Q का त्वरण)

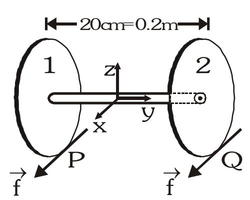
$$\therefore\; a_0 + R\,\alpha = a \Rightarrow \left(\frac{f}{2}\right) + (0.1)\,(10f) = a$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}f = a \Rightarrow f = \frac{2a}{3} = \frac{2 \times 9.0}{3}N \;\therefore\; f = 6N$$

Since, this force is acting in positive x − direction. (चूंकि यह बल धनात्मक x-दिशा में लगता है)

Therefore, in vector from $\vec{f} = (6\hat{i})N$

(अत: सदिश रूप में)



(ii) $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{f}$ Here, $\vec{f} = (6\hat{i})N$ (for both the discs)

$\vec{r}_P = \vec{r}_1 = -0.1\hat{j} - 0.1\hat{k}$ and $\vec{r}_Q = \vec{r}_2 = 0.1\hat{j} - 0.1\hat{k}$

Therefore, frictional torque on disk 1 about point O (centre of mass). (अत: बिन्दु O के सापेक्ष चकती 1 पर घर्षण बलाघूर्ण)

$$\vec{\tau}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{f} = (-0.1\hat{j} - 0.1\hat{k}) \times (6\hat{i})N - m$$

$$= (0.6\hat{k} - 0.6\hat{j}) \Rightarrow \vec{\tau}_1 = 0.6(\hat{k} - \hat{j})\,N\text{–}m$$

and $|\vec{\tau}_1| = \sqrt{(0.6)^2 + (0.6)^2} = 0.85$ N–m

Similarly, $\vec{\tau}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{f} = 0.6(-\hat{j} - \hat{k})$

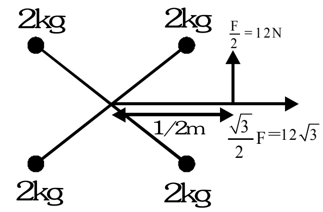
and $|\vec{\tau}_1| = |\vec{\tau}_2| = 0.85$ N–m

10. $\therefore\; \tau = I\alpha$ and $\tau = |\vec{r} \times \vec{F}| = rf\sin\theta$

for maximum torque the angle between r and f must be 90 i.e. perpendicular to the heavy door. (अधिकतम बलाघूर्ण के लिए r तथा f के मध्य कोण 90 होगा। अत: भारी दरवाजे के लम्बवत्)

11. Moment of inertia about an axis passing through intersection point (प्रतिच्छेद बिन्दु से होकर गुजरने वाले अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण)

$= mr^2 \quad 4 = 2 \quad \left(\frac{1}{4}\right)^2 \quad 4 = \frac{1}{2}$



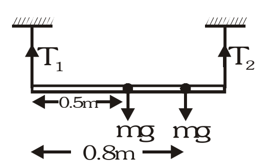
Torque of force about this point = 12 $\frac{1}{2}$ =6

(इस बिन्दु के सापेक्ष बलाघूर्ण)

$\therefore$ Angular acceleration (कोणीय त्वरण)

$$\alpha = \frac{\tau}{I} = 6 \quad 2 = 12\text{rad/s}^2$$

12. For translational equilibrium $T_1 + T_2 = 2mg$ (स्थानान्तरित साम्यावस्था के लिए)



For rotatory equilibrium (घूर्णन साम्यावस्था के लिए)

Take torque about extreme left point

(बाह्य बिन्दु के सापेक्ष बलाघूर्ण लेने पर)

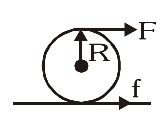
$= mg[0.5 + 0.8] = T_2 \quad 1$

$T_2 = mg \quad 1.3 \;\therefore\; T_1 = 2mg - T_2 = 0.7$ mg

$$\therefore \text{ Ratio } \frac{T_1}{T_2} = \frac{0.7mg}{1.3mg} = \frac{7}{13}$$

13. Let the mass of sphere be 'm' & the linear acceleration of sphere be = a

(माना गोले का द्रव्यमान m तथा गोले का रेखीय त्वरण a है)



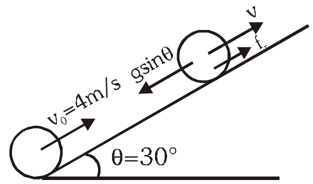
For translatory motion (स्थानान्तरित गति के लिए)

F + f = ma ...(i)

For rotatory motion (for no slipping) $\Rightarrow \tau = I\alpha$

(घूर्णन गति के लिए (बिना फिसले हुए))

21. We have FBD as shown (प्रदर्शित FBD में)



So cylinder stop at when translatory and rotatory both stops. So constant acceleration is there (जब स्थानान्तरित तथा घूर्णन गति दोनों रूक जाती है तो बेलन रूक जाता है। अतः यहां त्वरण नियत होता है)

$$a = g\sin\theta - \frac{f_r}{m}$$

$\because f_r = \mu mg\cos\theta \Rightarrow a = g\sin\theta - \mu g\cos\theta$

So we have equation v=u+at (as v=0)

$\Rightarrow 4 = (g\sin\theta - \mu g\cos\theta) \Rightarrow t = \dfrac{4}{g\sin\theta - \mu g\cos\theta}$

By $\tau = I\alpha$

Torque by friction $\tau = f_r R \Rightarrow f_r R = \dfrac{mR^2\alpha}{2}$

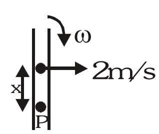
$\Rightarrow \mu mg\cos\theta = \dfrac{1}{2} mR\alpha \Rightarrow \alpha = \dfrac{2\mu g\cos\theta}{R}$

We know $a = \alpha R$

$\Rightarrow g\sin\theta - \mu g\cos\theta = 2\mu g\cos\theta$ (as $\theta = 30$)

$\Rightarrow \mu = \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$ so $t = \dfrac{4}{\dfrac{g}{2}\left(1 - \dfrac{\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}\right)} \Rightarrow$ t= 1.2 sec

22. Rod rotates about the C.M. let the point 'P' at a distance 'x' from C.M. having a zero velocity. (द्रव्यमान केन्द्र के सापेक्ष छड़ घूर्णन करती है। माना द्रव्यमान केन्द्र से x दूरी पर बिन्दु P है, जिसका वेग शून्य है)



$\therefore$ For zero velocity (शून्य वेग के लिए)

$\omega x - 2 = 0$

$\Rightarrow x = \dfrac{2}{\omega} = \dfrac{2}{2\pi} = \dfrac{1}{\pi}$ m

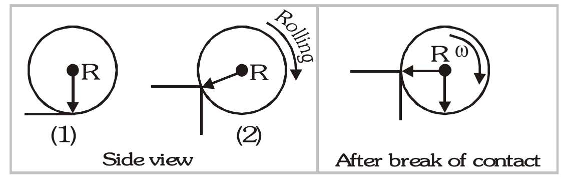
$\Rightarrow x = \dfrac{1}{\pi}$ m

(down to the centre of mass)

(द्रव्यमान केन्द्र से नीचे की ओर)

EXERCISE –IVB

1.(i) As the cylinder rolls without slipping about an axis passing through C.M, hence mechanical energy of the cylinder will be conserved i.e. (चूंकि द्रव्यमान केन्द्र से होकर गुजरने वाले अक्ष के सापेक्ष बेलन बिना फिसले लुढ़कता है। अतः बेलन की यांत्रिक ऊर्जा संरक्षित होगी। अर्थात्)



$\therefore (U + KE)_1 = (U + KE)_2$

$$mgR + 0 = mgR\cos\theta + \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

but $\omega = \dfrac{v}{R}$ and $I = \dfrac{1}{2}mR^2$.

Therefore $mgR = mgR\cos\theta + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}mR^2\right)$

$$\frac{v^2}{R^2} + \frac{1}{2}mv^2 \; \frac{v^2}{R^2} = \frac{4}{3}g(1-\cos\theta) \;\ldots\text{(i)}$$

When the cylinder leaves the contact, normal reaction (जब बेलन सम्पर्क छोड़ता है तो अभिलम्ब प्रतिक्रिया) $N = 0$ and $\theta = \theta_c$.

Hence $mg\cos\theta_c = \dfrac{mv^2}{R} \Rightarrow \dfrac{v^2}{R} = g\cos\theta_c$ …(ii)

(i) & (ii) $= \dfrac{4}{3}g(1-\cos\theta) = g\cos\theta_c$

$$\cos\theta_c = \frac{4}{7} = \theta_c = \cos^{-1}\left(\frac{4}{7}\right)$$

At the time it leaves the contact $\cos\theta = \cos\theta_c = \dfrac{4}{7}$ (वह समय जब यह सम्पर्क छोड़ता है)

(ii) On substituting it in equation (i),

$$v = \sqrt{\frac{4}{3}gR\left(1-\frac{4}{7}\right)} = \sqrt{\frac{4}{7}gR}$$

(iii) At the moment, when the cylinder leaves the contact (उस क्षण जब बेलन सम्पर्क छोड़ता है)

$$v = \sqrt{\frac{4}{7}gR}$$

Therefore rotational kinetic energy $K_R = \dfrac{1}{2}I\omega^2$ (अतः घूर्णन गतिज ऊर्जा)

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\frac{v^2}{R^2} = \frac{1}{4}mv^2 = \frac{1}{4}m\left[\frac{4}{7}gR\right] = K_R = \frac{mgR}{7} \;\ldots\text{(iii)}$$

(ii) Velocity of CM (द्रव्यमान केन्द्र का वेग) = $\dfrac{MV - mv}{M + m}$

$\because V_{cm} = \dfrac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$

Velocity of C.M remains constant as the (द्रव्यमान केन्द्र का वेग, नियत बना रहता है)

$\vec{f}_{ext} = 0$ for system

(iii) From the angular momentum conservation (कोणीय संवेग संरक्षण से) $I_1\omega_1 = I_2\omega_2$

$$\Rightarrow \omega_2 = \frac{I_1\omega_1}{I_2} \Rightarrow \omega_2 = \frac{\dfrac{Mm\ell^2}{(M+m)} \times \left(\dfrac{V+v}{\ell}\right)}{\dfrac{Mm\ell_0^2}{(M+m)}}$$

$$\therefore \omega_2 = \frac{V+v}{\ell}\left(\frac{\ell^2}{\ell_0^2}\right)$$

(iv) Work done by couple (युग्मों द्वारा किया गया कार्य)

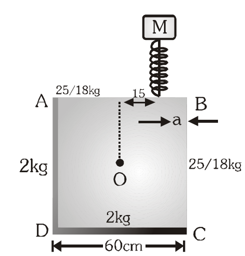
= change in rotational kinetic energy (घूर्णन गतिज ऊर्जा में परिवर्तन)

$$= \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 - \frac{1}{2}I_1\omega_1^2$$

$$= \frac{1}{2}\frac{Mm}{M+m}(V+v)^2\left[1 - \frac{\ell}{\ell_0}\right]$$

(By putting I_1, I_2, ω_1 & ω_2) we get the answer

6. (i) To calculate mass M we have to balance torque about point O.
(द्रव्यमान Mकी गणना जब O के सापेक्ष बलाघूर्ण संतुलित होगा)



So $\dfrac{25}{18} \times 30 + M \times 15 = 2 \times 30$; $M = \dfrac{11}{9}$ Kg

Torque due to rod AB and CD is zero.
(छड़ AB तथा CD के कारण बलाघूर्ण शून्य होगा)

(ii) When thread is burnt then energy stored in spring is distributed in term of velocity of block and to rotate the fream. (जब धागा टूटता है तो स्प्रिंग में संचित ऊर्जा ब्लॉक के वेग के पदों में वितरित होती है तथा फ्रेम घूर्णन करता है)
By angular momentum conservation.
(कोणीय संवेग संरक्षण से)

Initial momentum = Final momentum
(प्रारम्भिक संवेग = अन्तिम संवेग)

$\Rightarrow 0 = mvr - I\omega \qquad \Rightarrow I\omega = mvr$...(i)

By energy conservation (ऊर्जा संरक्षण द्वारा)

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \text{ ...(ii)}$$

Value of Moment of inertia about point O is
(बिन्दु O के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण का मान)

$$I = 2\left[\frac{25}{18} \times \frac{(0.6)^2}{12} + \frac{25}{18} \times (0.3)^2\right] + 2\left[2 \times \frac{(0.6)^2}{12} + 2 \times (0.3)^2\right]$$

So $I = \dfrac{61}{75}$. So by equation (i) We have

$$\frac{61}{75}\omega = \frac{11}{9} \times v \times 0.15 \Rightarrow \frac{61}{75}\omega = \frac{11}{9} \times v \times \frac{15}{100}$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{5 \times 11}{61 \times 4}v \Rightarrow \omega = \frac{55}{244}v$$

Put this value in equation (ii)

$$\Rightarrow 76.5 = \frac{1}{2} \times \frac{61}{75} \times \left(\frac{5 \times 11}{61 \times 4}\right)^2 v^2 + \frac{1}{2} \times \frac{11}{9} \times v^2$$

$$\Rightarrow 76.5 = \frac{1}{2} \times \frac{61}{75} \times \frac{25 \times 121}{61 \times 61 \times 16}v^2 + \frac{1}{2} \times \frac{11}{9} \times v^2$$

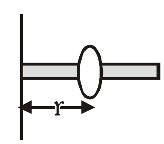
$$\Rightarrow 76.5 = v^2\left[\frac{121}{96 \times 61} + \frac{11}{18}\right]$$

$$\Rightarrow 76.5 = v^2\left[\frac{2178 + 64416}{105408}\right]$$

$$\Rightarrow 76.5 = v^2 \times \frac{66594}{105408}$$

$\Rightarrow v^2 = 121.08 \Rightarrow v \approx 11$ m/s

7.



Power

$$= \frac{dw}{dt} = \frac{\tau d\theta}{dt} = \frac{\dfrac{dL}{dt} \times d\theta}{dt} = \frac{dL}{dt} \quad \omega = 2\ mr^2\omega^2 \quad \omega$$

$(\therefore L = mr^2\omega\ ;\ \tau = \dfrac{dL}{dt} = 2\ mr\omega\dfrac{dr}{dt})$

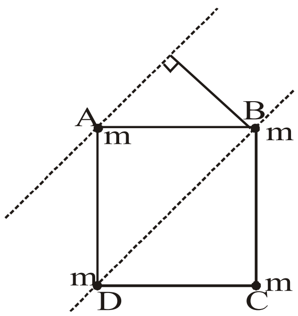
$\dfrac{dL}{dt} = 2\ mr\omega \quad r\omega = 2\ mr^2\omega^2 \quad [\dfrac{dr}{dt} = V = r\omega]$

Power = $2mr^2\omega^3$

13. Coin will leave the contact if N = 0

so mg = m(ω^2A) $\Rightarrow A = \dfrac{g}{\omega^2}$

14. $I_{abt.A} = I_{due\ to\ A} + I_{due\ to\ B} + I_{due\ to\ C} + I_{due\ to\ D}$



$$I_{abt.A} = 0 + m\left(l\cos 45°\right)^2 + m\left(l\cos 45°\right)^2 + \left(\sqrt{2}l\right)^2$$

$$I_{abt.A} = \frac{ml^2}{2} + \frac{ml^2}{2} + 2ml^2 = 3ml^2$$

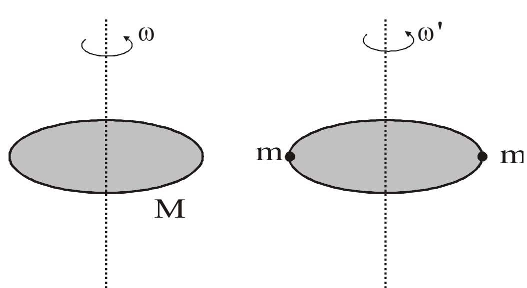
15. $\vec{F} = F\left(-\tilde{k}\right)$

Position vector of O w.r.t. to given point $\vec{r} = -\tilde{i} + \tilde{j}$
(दिये गये बिन्दु के सापेक्ष O का स्थिति सदिश)

Torque about P (P के सापेक्ष बलाघूर्ण) $= \vec{r} \times \vec{F}$

$= \left(-\tilde{i} + \tilde{j}\right) \times F\left(-\tilde{k}\right) = F\left(-\tilde{j} - \tilde{i}\right) = -F\left(\tilde{i} + \tilde{j}\right)$

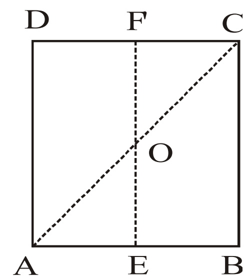
16. Conserving angular momentum, we get
(कोणीय संवेग संरक्षण से)



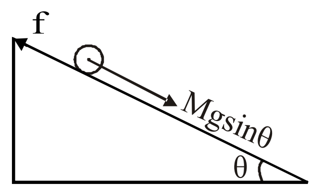
$$mR^2\omega = \left(mR^2 + MR^2 + MR^2\right)\omega'$$

$$\Rightarrow \omega' = \left(\frac{m}{m + 2M}\right)\omega$$

17. The moment of inertia of a uniform square lamina about any axis passing through its centre and in the plane of the lamina is same hence $I_{AC}=I_{EF}$
(पट्टिका के तल में तथा इसके केन्द्र से होकर गुजरने वाले अक्ष के सापेक्ष समरूप वर्गाकार पट्टिका का जड़त्व आघूर्ण समान होता है, अत: $I_{AC}=I_{EF}$)



19.



The force equation (बल का समीकरण)

Mgsinθ−f=Ma ...(i)

The torque equation (बलाघूर्ण का समीकरण)

fR=Iα ..(ii)

for pure rolling motion (शुद्ध घूर्णन गति के लिए)

$\alpha = \dfrac{a}{R}$; $fR = \dfrac{Ia}{R}$; $f = \dfrac{Ia}{R^2}$

From equations (i) and (iii), we get

$$\Rightarrow Mg\sin\theta - \frac{Ia}{R^2} = Ma \Rightarrow Mg\sin\theta = a\left[M + \frac{I}{R^2}\right]$$

$$\Rightarrow Mg\sin\theta = Ma\left[1 + \frac{I}{MR^2}\right] \Rightarrow a = \frac{g\sin\theta}{1 + \frac{I}{MR^2}}$$

20. A central force cannot apply the torque about the centre, hence the angular momentum of the body under the central force will be a constant.
(केन्द्रीय बल, केन्द्र के सापेक्ष बलाघूर्ण पर आरोपित नहीं कर सकते हैं, अत: केन्द्रीय बल के अधीन वस्तु का कोणीय संवेग नियत रहता है)

22. $\dfrac{1}{2}I\omega^2 = mgh$ where $I = \dfrac{m\ell^2}{3}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{m\ell^2}{3}\omega^2 = mgh \Rightarrow h = \frac{\ell^2\omega^2}{6g}$$

23. $\because$ Angular momentum (कोणीय संवेग)

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

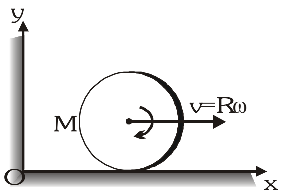
where $\vec{r} = u\cos\theta t\ \tilde{i} + \left(u\sin\theta\ t - \dfrac{1}{2}gt^2\right)\tilde{j}$

$\vec{p} = m[u\cos\theta\tilde{i} + (u\sin\theta - gt)\tilde{j}]$

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = -\dfrac{1}{2}mgv_0t^2\cos\theta\,\hat{k}$

(चूंकि यह दो समरूप गेंदों के मध्य सम्मुख प्रत्यास्थ टक्कर है। इनके रेखीय वेग आपस में परिवर्तित हो जाते हैं अर्थात् A विरामावस्था तथा B रेखीय वेग v से गति करना प्रारम्भ कर देता है। चूंकि यहां कहीं भी कोई घर्षण नहीं है तथा इनके द्रव्यमान केन्द्र के सापेक्ष दोनों गोलों पर बलाघूर्ण शून्य तथा इनका कोणीय वेग अपरिवर्तित रहता है। अतः $\omega_A = \omega$ and $\omega_B = 0$.

4. From the theorem (प्रमेय से)



$$\vec{L}_0 = \vec{L}_{CM} + M(\vec{r} \times \vec{v}) \qquad \ldots(i)$$

We may write :

Angular momentum about O= Angular momentum about CM + Angular momentum of CM about origin. (O के सापेक्ष कोणीय संवेग = द्रव्यमान केन्द्र के सापेक्ष कोणीय संवेग + मूल बिन्दु के सापेक्ष द्रव्यमान केन्द्र का कोणीय संवेग)

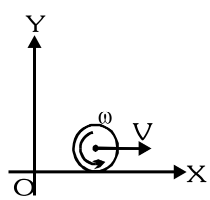
$\therefore\ L_0 = I\omega + MRv = \frac{1}{2}MR^2\omega + MR(R\omega) = \frac{3}{2}MR^2\omega$

Note that in this case both the terms in Equation (i) i.e. $\vec{L}_{CM}$ and $M(\vec{r} \times \vec{v})$ have the same direction $\otimes$.

That is why we have used $L_0 = I\omega + MRv$

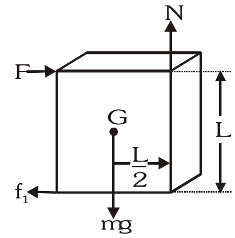
We will use $L_0 = I\omega \sim MRv$

if they are in opposite direction as shown in figure.



5. Net external torque on the system is zero. Therefore, angular momentum is conserved. Force acting on the system are only conservative. Therefore, total mechanical energy of the system is also conserved. (निकाय पर कुल बाह्य बलाघूर्ण शून्य होता है अतः कोणीय संवेग संरक्षित होगा। निकाय पर आरोपित बल केवल संरक्षी होते हैं, अतः निकाय की कुल यांत्रिक ऊर्जा भी संरक्षित होगी)

6. At the critical condition, normal reaction N will pass through point P. (क्रान्तिक स्थिति पर अभिलम्ब प्रतिक्रिया N बिन्दु P से होकर गुजरती है)



In this condition (इस स्थिति में) $\tau_N = 0 = \tau_{fr}$ (about P) the block will topple when (ब्लॉक पलटेगा जब)

$\tau_F > \tau_{mg} \Rightarrow FL > (mg)\,\frac{L}{2}\ \therefore F > \frac{mg}{2}$

Therefore, the minimum force required to topple the block is $F = \frac{mg}{2}$

(अतः ब्लॉक को उलटने के लिए आवश्यक न्यूतमम बल)

7. Mass of the ring (वलय का द्रव्यमान) $M = \rho L$

Let R be the radius of the ring, then

(माना, वलय की त्रिज्या R है तो) $L = 2\pi R \Rightarrow R = \frac{L}{2\pi}$

Moment of inertia about an axis passing through O and parallel to XX' will be (XX' अक्ष के समान्तर तथा O से होकर गुजरने वाले अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण)

$I_0 = \frac{1}{2}MR^2$

Therefore, moment of inertia about XX' (from parallel axis theorem) will be given by (अतः XX' के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण (समान्तर अक्षों के प्रमेय से)

$$I_{XX'} = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$$

Substituting values of M and R

$$I_{XX'} = \frac{3}{2}(\rho L)\left(\frac{L^2}{4\pi^2}\right) = \frac{3\rho L^3}{8\pi^2}$$

8. Mass of the whole disc = 4 M

(सम्पूर्ण चकती का द्रव्यमान)

Moment of inertia of the disc about the given axis (दिये गये अक्ष के सापेक्ष चकती का जड़त्व आघूर्ण)

$= \frac{1}{2}(4M)R^2 = 2MR^2$

$\therefore$ Moment of inertia of quarter section of the disc (चकती के एक चौथाई भाग का जड़त्व आघूर्ण)

$= \frac{1}{4}(2MR^2) = \frac{1}{2}MR^2$

16. $I_{remaining} = I_{whole} - I_{removed}$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}(9M)(R)^2 - \left[\frac{1}{2}m\left(\frac{R}{3}\right)^2 + 1m\left(\frac{2R}{3}\right)^2\right] \ldots(i)$$

Here, $m = \frac{9M}{\pi R^2} \times \pi\left(\frac{R}{3}\right)^2 = M$

Substituting in Equation (1), we have $I = 4MR^2$

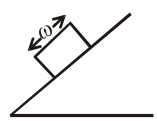
17. $\frac{2}{5}MR^2 = \frac{1}{2}Mr^2 + Mr^2 \Rightarrow \frac{2}{5}MR^2 = \frac{3}{2}Mr^2$

$\therefore\ r = \frac{2}{\sqrt{15}}R$

18. $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\left(\frac{v}{R}\right)^2 = mg\left(\frac{3v^2}{4g}\right)\ \therefore\ I = \frac{1}{2}mR^2$

$\therefore$ Body is disc.

19. Condition for no toppling
(नहीं पलटने की स्थिति के लिए)



$N\left(\frac{W}{2}\right) > \mu N\left(\frac{h}{2}\right)$

$\frac{\omega}{h} > \mu \Rightarrow \frac{2}{3} > \mu \Rightarrow \mu < \frac{2}{3}$

but as the coefficient of friction is greater than 1 block will topple at some angle (लेकिन घर्षण गुणांक का मान 1 से अधिक है अत: ब्लॉक कुछ कोण से पलटेगा।)

20. (A) $\frac{dp}{dt} = F_{ext}$ as $F_{ext} = 0 \Rightarrow dp = 0$,
change in momentum is zero
(संवेग में परिवर्तन शून्य है)

(B) Kinetic energy of particle is scaler quantity therefore. It may change for a system, if external force is zero
(कण की गतिज ऊर्जा अदिश राशि है अत: यह निकाय के लिए परिवर्तित होती है। यदि बाह्य बल शून्य हो।)

(C) $F_{ext} = 0$ does not indicate that torque is zero therefore there may be change in angular momentum.
($F_{ext} = 0$ प्रदर्शित नहीं करता है कि बलाघूर्ण शून्य है। अत: इसके कोणीय संवेग में परिवर्तन होता है।)

(D) Internal force on the system may decrease due to the polential energy (निकाय पर आन्तरिक बल, स्थितिज ऊर्जा के कारण घटता है)

MCQ

1. $\vec{\tau} = \vec{A} \times \vec{L}$ i.e. $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{A} \times \vec{L}$

This relation implies that $\frac{d\vec{L}}{dt}$ is perpendicular to both $\vec{A}$ and $\vec{L}$. (यह सम्बन्ध दर्शाता है कि $\frac{d\vec{L}}{dt}$, $\vec{A}$ व $\vec{L}$ दोनों के लम्बवत् है)

Therefore option (a) is correct.

For (B)

Component of $\vec{L}$ in the direction of $\vec{A} = \vec{L} \cdot \tilde{A}$
($\vec{A}$ की दिशा में $\vec{L}$ का घटक)

As $\frac{d}{dt}(\vec{L} \cdot \tilde{A}) = \vec{L} \cdot \frac{d\tilde{A}}{dt} + \frac{d\vec{L}}{dt} \cdot \tilde{A} = 0$

The component of $\vec{L}$ in the direction of $\vec{A}$ does not change with time. ($\vec{A}$ की दिशा में $\vec{L}$ का घटक समय के साथ परिवर्तित नहीं होता है)

For (C)

Here, $\vec{L}.\vec{L} = L^2$
Differentiating w.r.t. time, we get
(समय के सापेक्ष अवकलन करने पर)

$$\vec{L}.\frac{d\vec{L}}{dt} + \frac{d\vec{L}}{dt}.\vec{L} = 2L\frac{dL}{dt} \Rightarrow 2\vec{L}.\frac{d\vec{L}}{dt} = 2L\frac{dL}{dt}$$

But since, $\vec{L} \perp \frac{d\vec{L}}{dt}\ \therefore \vec{L}.\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$

Therefore, from Equation (i) $\frac{dL}{dt} = 0$

or magnitude of $\vec{L}$ i.e. L does not change with time. (अथवा $\vec{L}$ का परिमाण अर्थात् L समय के साथ परिवर्तित नहीं होता है)

2. In case of pure rolling (शुद्ध लोटनी गति की स्थिति में)

$$f = \frac{mg\sin\theta}{1 + \frac{mR^2}{I}} \text{ (upwards)} \quad \therefore f \propto \sin\theta$$

Therefore, as θ decreases force of friction will also decrease.(अत: θ घटता है तो घर्षण बल भी घटेगा।)

3. On smooth part BC, due to zero torque, angular velocity and hence the rotational kinetic energy remains constant. While moving from B to C translational kinetic energy converts into gravitational potential energy.
(चिकनी सतह BC पर, शून्य बलाघूर्ण के कारण कोणीय वेग होगा तथा घूर्णन गतिज ऊर्जा नियत रहती है जबकि B से C तक गति के दौरान स्थानान्तरित गतिज ऊर्जा, गुरूत्वीय स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तित हो जाती है।)

$$= \left\{ \frac{mR^2}{4} + m\left(\frac{R}{4}\right)^2 \right\} + m\left(\frac{5R}{4}\right)^2 \Rightarrow I = \frac{15mR^2}{8}$$

From conservation of mechanical energy,
(यांत्रिक ऊर्जा संरक्षण से)

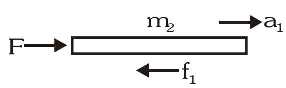
Decrease in potential energy = Gain in kinetic energy (स्थितिज ऊर्जा में कमी =गतिज ऊर्जा में वृद्धि)

$$\therefore\ 3mgR = \frac{1}{2}\left(\frac{15mR^2}{8}\right)\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{16g}{5R}}$$

Therefore, linear speed of particle at its lowest point (इसलिए, इसके निम्नतम बिन्दु पर कण की रेखीय चाल)

$$v = \left(\frac{5R}{4}\right)\omega = \frac{5R}{4}\sqrt{\frac{16g}{5R}} \Rightarrow v = \sqrt{5gR}$$

2. We can choose any arbitrary directions of frictional forces at different contacts.
(हम विभिन्न सम्पर्क बिन्दुओं पर घर्षण बलों की किसी भी स्वैच्छिक दिशा का चयन कर सकते हैं।)



In the final answer the negative values will show the opposite directions.
(अन्तिम उत्तर में ऋणात्मक मान विपरित दिशाओं को प्रदर्शित करेगें)

Let

f_1 = friction between plank and cylinder
(तख्ते तथा बेलन के मध्य घर्षण)

f_2= friction between cylinder and ground
(बेलन तथा जमीन के मध्य घर्षण)

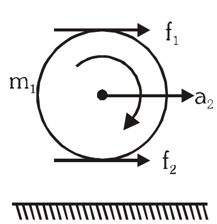
a_1 = acceleration of plank (तख्ते का त्वरण)

a_2 = acceleration of centre of mass of cylinder
(बेलन के द्रव्यमान केन्द्र का त्वरण)

and

α = angular acceleration of cylinder about its CM.
(इसके द्रव्यमान केन्द्र के सापेक्ष बेलन का कोणीय त्वरण)

Directions of f_1 and f_2 are as shown here
(f_1 तथा f_2 दिशाऐं चित्रानुसार होंगी)



Since, there is no slipping anywhere
(चूंकि यहां कहीं भी कोई फिसलन नहीं है)

$\therefore\ a_1 = 2a_2$ ...(i)

(Acceleration of plank = acceleration of top point of cylinder (तख्ते का त्वरण = बेलन के शीर्ष बिन्दु का त्वरण)

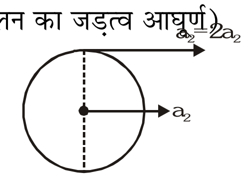
$$a_1 = \frac{F - f_1}{m_2} \quad ...(ii)$$

$$a_2 = \frac{f_1 + f_2}{m_1} \quad ...(iii)$$

$$\alpha = \frac{(f_1 - f_2)R}{I}$$

(I = moment of inertia of cylinder above CM)
(I= द्रव्यमान केन्द्र के ऊपर बेलन का जड़त्व आघूर्ण)

$$= \frac{(f_1 - f_2)R}{\frac{1}{2}m_1R^2}$$



$$\alpha = \frac{2(f_1 - f_2)}{m_1R} \quad ...(iv)$$

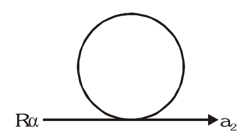
$$a_2 = R\alpha = \frac{2(f_1 - f_2)}{m_1} \quad ...(v)$$

(Acceleration of bottom most point of cylinder =0)
(बेलन के निम्नतम बिन्दु का त्वरण)

(a) Solving Equation (i), (ii), (iii) and (v),

we get $a_1 = \dfrac{8F}{3m_1 + 8m_2}$

and $a_2 = \dfrac{4F}{3m_1 + 8m_2}$

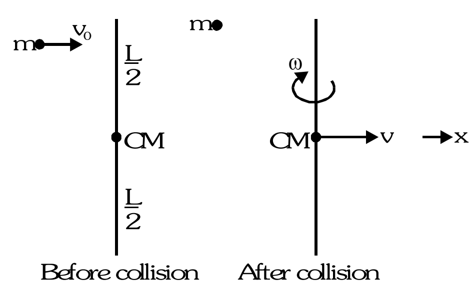


(b) $f_1 = \dfrac{3m_1F}{3m_1 + 8m_2}$; $f_2 = \dfrac{m_1F}{3m_1 + 8m_2}$

Since all quantities are positive.

3. (i) Let just after collision, velocity of CM of rod is v and angular velocity about CM is ω.
(माना टक्कर के ठीक बाद छड़ के द्रव्यमान का वेग v है तथा द्रव्यमान केन्द्र के सापेक्ष कोणीय वेग ω है।)

Applying following three laws :



Solving Equation (i) and (ii) for r,

we get $r = 0.4$ m and $r = 0.1$ m

But at $r = 0.4$m, ω comes out to be negative (-0.5 rad/s) which is not acceptable.

(लेकिन $r=0.4$ m, $\omega=-0.5$ rad/s जो कि असम्भव है)

(i) r = distance of CM from AB = 0.1 m

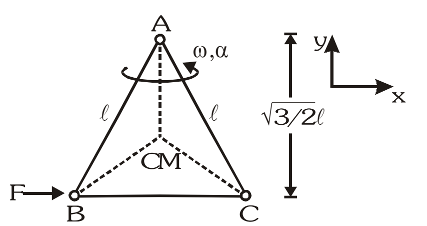
(ii) Substituting r = 0.1m in Equation (i), we get $\omega=1$ rad/s i.e., the angular velocity with which sheet comes back after the first impact is 1 rad/s. (r = 0.1m समीकरण (i) में रखने पर $\omega=1$ rad/s अर्थात् प्रथम टक्कर के बाद समतलीय पट्टी 1 rad/s के कोणीय वेग वापस आयेगी।)

(iii) Since, the sheet returns with same angular velocity of 1 rad/s, the sheet will never come to rest. (चूंकि समतलीय पट्टी समान कोणीय वेग 1 rad/s से लौटेगी अतः पट्टी कभी विरामावस्था में नहीं आयेगी।)

5. (i) The distance of centre of mass (CM) of the system about point A will be: $r = \dfrac{\ell}{\sqrt{3}}$

(बिन्दु A के सापेक्ष निकाय के द्रव्यमान केन्द्र की दूरी)

Therefore, the magnitude of horizontal force exerted by the hinge on the body is (इसलिए, वस्तु पर कब्जे द्वारा आरोपित क्षैतिज बल का परिमाण)



F = centripetal force $\Rightarrow F = (3m)\, r\omega^2$

$$\Rightarrow F = (3m)\left(\frac{\ell}{\sqrt{3}}\right)\omega^2 \Rightarrow F = \sqrt{3}\, m\ell\omega^2$$

(ii) Angular acceleration of system about point A is (बिन्दु A के सापेक्ष निकाय का कोणीय त्वरण)

$$\alpha = \frac{\tau_A}{I_A} = \frac{F\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ell\right)}{2m\ell^2} = \frac{\sqrt{3}F}{4m\ell}$$

Now, acceleration of CM along x–axis is (अब, x-अक्ष के अनुदिश द्रव्यमान केन्द्र का त्वरण)

$$a_x = r\alpha = \left(\frac{\ell}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}F}{4m\ell}\right) \Rightarrow a_x = \frac{F}{4m}$$

Now, let F_x be the force applied by the hinge along x–axis. Then, (अब, x-अक्ष के अनुदिश कब्जे द्वारा आरोपित बल, माना F_x है तो)

$$F_x + F = (3m)a_x \Rightarrow F_x + F = (3m)\left(\frac{F}{4m}\right)$$

$$\Rightarrow F_x + F = \frac{3}{4}F \Rightarrow F_x = -\frac{F}{4}$$

Now, let F_y be the force applied by the hinge along y–axis. (चूंकि y-अक्ष के अनुदिश कब्जे द्वारा आरोपित बल, माना F_y है तो)

Then,

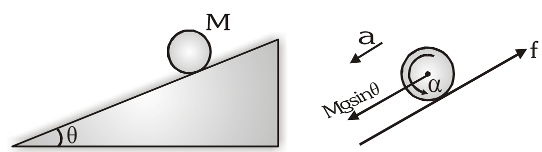
F_y = centripetal force $\Rightarrow F_y = \sqrt{3}\, m\ell\omega^2$

6. Angular momentum of the system about point O will remain conserved. (बिन्दु O के सापेक्ष निकाय का कोणीय संवेग संरक्षित रहता है)

$L_i = L_f$

$$\therefore mvL = I\omega = \left[mL^2 + \frac{ML^2}{3}\right]\omega \quad \therefore \omega = \frac{3mv}{L(3m+M)}$$

7. For rolling without slipping, we have (बिना लुढ़के घूर्णन के लिए)



$a = R\alpha$

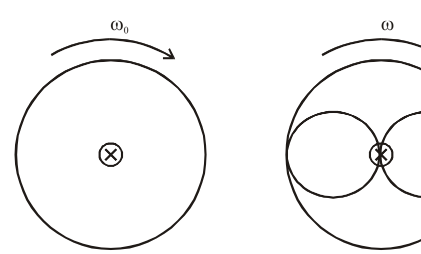
$$\Rightarrow \frac{Mg\sin\theta - f}{M} = R\left(\frac{fR}{\frac{1}{2}MR^2}\right) \Rightarrow \frac{Mg\sin\theta - f}{M} = \frac{2f}{M}$$

$$\therefore f = \frac{Mg\sin\theta}{3}$$

Therefore, linear acceleration of cylinder, (इसलिए, बेलन का रेखीय त्वरण)

$$a = \frac{Mg\sin\theta - f}{M} = \frac{2}{3}g\sin\theta$$

8. by angular momentum conservation



$$I_{disc}\,\omega_0 = \left(I_{disc} + 2I_{ring}\right)\omega$$

$$\Rightarrow \frac{50(0.4)^2}{2}\times 10 = \left[\frac{50(0.4)^2}{2} + 2\left(2\times 6.25\times(0.2)^2\right)\right]\omega$$

$\Rightarrow \omega = 8$ rad/sec.